文系東大後期受験生のための微分積分講座（？）

・・・と銘打ってみましたが、うまく説明できる自信はあんまりありません。あと、後期の為だけに数学を勉強しなければならない人向けなので、少々いい加減なところがあります。まじめに勉強しようとすると、「後期までに微分方程式を解けるようになる」という（数ⅢC 未履修者には）拷問としか思えない目標をクリアすることなんてできませんので・・・

一応、なにか参考書を用意してください。教科書でもいいし、チャート式でもいいです。

それでは始めましょう。

まず、極限についてです。すごく大雑把に言ってしまえば、「この式の中の x の値を限りなく a に近づけたらどうなるんだろう」というのが極限です。例えば、3x について、この x を限りなく 4 に近づけたら値はいくつになるでしょう？・・・12 ですね。このことを、以下のように書きます。

$$\lim_{x \to 4} 3x = 12$$

思い出しましたか？実は数Ⅱでも微積分の最初のほうで極限の取り扱いは勉強しています。忘れていた人は教科書を開いてさーっと眺めてみてください。

きちんとしたことは教科書なり参考書の解説にゆだねるとして、先に進みます。

いよいよ数ⅢC でしか出てこない微分の計算についてお話します・・・と言いたいところですがもう一つ復習。

微分ってなんでしたっけ？

高校の数学では、導関数を定義し、それを求めることを「微分する」って言いました。

じゃあ、導関数って？？

「えっと、y にダッシュをつけて、指数部分を前に持ってきて 1 引いて・・・」

残念。それは結果であって定義ではありません。

正解は以下の通りです。

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

これは、「接線の傾きを求める」ことがもとになっていることを考えると理解しやすい式です。詳しくは教科書・参考書を参照して下さい。

さあ、復習はこの辺にして、いよいよ数ⅢC に入ります。

①三角関数の微分

さあ、最初の山場です。三角関数を微分します。

$$\frac{d}{dx}\sin x=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

加法定理を用いて分子を展開します。

$$\sin(x+h)-\sin x=\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x=\sin x(\cos h-1)+\sin h\cos x$$

これを h で割って極限をとります。まず、

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

です。これはお手持ちに教科書・参考書を参照してください。きちんと証明できるはずです。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{(\cos h+1)h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos h+1}\cdot\frac{\sin h}{h}\cdot\sin h=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0=0$$

慣れていないとこの計算に戸惑うかもしれません。極限計算は割り切って、「明らかに極限値の求まる塊をつくっていく」ようにすればいいと思います。

それでは計算に入ります。

$$\frac{d}{dx}\sin x=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sin x\cdot\frac{\cos h-1}{h}+\frac{\sin h}{h}\cos x\right)=\cos x$$

同様にすると cosx の導関数も計算できます。結果は以下の通りです。

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$$

上の証明が理解できなかった人も、取り敢えずこれは覚えて下さい。

②指数関数の微分

この世界には不思議な数があります。2.7182818284590452…という数です。以下これを e と書きます。

指数関数というのは、たとえば

$$y=2^x$$

のような関数でしたね。この２の所に e を入れますと、

$$y = e^x$$

という関数が出来ます。これを微分すると、じつは、

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

となるのです！！これは 2.7182818284590452…の持つ、不思議な魔力です。

さて、これを微分の定義に基づいて検証してみましょう。
「微分する」というのは「接線の傾きを求める」ことでしたから、定義式は、

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

でした。
この定義を先ほどの関数にも当てはめますと、

$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h}$$

となります。極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h}$$

の値は、なんと 1 に近づきます。これは事実として受け入れて下さい。高校数学では証明できないことになっています（なぜか大学生になっても証明できない自分がいる・・・授業で出てこなかった気がするというのは言い訳かしら）ので。
ともあれ、

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

が導けました。一般の指数関数はどうなのでしょう。

$$\frac{d}{dx}2^x = \lim_{h\to 0}\frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = 2^x\lim_{h\to 0}\frac{2^h - 1}{h}$$

これはちょっと難しいですね。難しい時は基本に戻ります。

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

だったので、この形が出てくるよう変形したいところです。つまり、2 の h 乗を e の何乗かで表せればいいのです。

ヒントは対数です。

対数の定義を思い出します。A って a の何乗ですか、っていう時の、「何乗」という指数部分を示すのが対数です。

即ち、

$$\log_{\mathrm{a}} \mathrm{A} = \mathrm{x} \Leftrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{a}^{\mathrm{x}}$$

です。ここで、A を 2 の h 乗、a を e としますと、

$$\log_e 2^h = x \Leftrightarrow 2^h = e^x = e^{\log_e 2^h}$$

となります。これをさっきの式に代入すると、

$$\frac{d}{dx}2^x = 2^x \lim_{h\to 0}\frac{2^h - 1}{h} = 2^x \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\log_e 2^h} - 1}{h} = 2^x \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{h\log_e 2} - 1}{h\log_e 2}\log_e 2$$

なお、e が底である対数を自然対数といい、普通底を省略して

log 2

のように書きます。

ここで、hlog2 を A とおきます。h が 0 に近づく時、明らかに A も 0 に近づきますから、

$$2^x \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{h\log 2} - 1}{h\log 2}\log 2 = 2^x \lim_{A\to 0}\frac{\mathrm{e}^{A} - 1}{A}\log 2 = 2^x \log 2$$

となります。以上纏めると、

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \log a \ (a > 0, a \neq 1)$$

となります。この 2 つの結果も覚えてください。

③積の微分

$$f(x)g(x)$$

のように、2 つの関数の積の形で表される関数の導関数はどのようなものになるでしょうか。こちらも定義に基づいて計算してみます。

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h}\}\{\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\}$$

$$= \{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\cdot g(x+h)\}\{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\cdot f(x)\}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

この結果も覚えてください。

④微分演算子の使い方
これは高校の教科書ではきちんと説明されていないのですが、簡単なことですし、見通しがよくなるので解説します。

まず、演算子とは何でしょうか。それは、「ある関数に特別な作用をするもの」です。そのもっとも分かりやすい例が、「『ある関数を微分する』という作用をもつもの」である微分演算子です。

それでは微分演算子について詳しく見て行きましょう。

微分する時もっとも大事なことは、「何をどの変数で微分するか」ということです。ｙをｘで微分するとき、

$$\frac{dy}{dx}$$

のように書きます。
この記号は分数のように扱えて、たとえば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}$$

のように扱えます。これの何が便利かっていうと、例えば

$$y = (ax+b)^n$$

を微分するとき、

$$ax + b = t$$

とおいて計算することができるのです。つまり、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dx}(ax+b) \cdot \frac{d}{dt}t^n = a \cdot nt^{n-1} = an(ax+b)^{n-1}$$

のような計算が可能ということです。きちんとした証明は参考書を参照してください。

このことを使うと一気に世界が広がります。たとえば、

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

であることが分かります。

また、「置換積分」と呼ばれる積分の計算も、演算子を分数的に扱うことで、混乱を防ぐことが出来ます。置換積分とは、変数そのままで計算するとややこしい、または積分が上手く求められない関数にたいし、「置き換え」をして計算することです。実際の問題例は参考書等参照してください。ここでは、うまく演算子を使うことをお教えします。

たとえば、

$$y = (2x)^4$$

を積分することを考えましょう。この場合括弧を取って計算してしまっても問題ないのですが、せっかくなので、

$$t = 2x$$

とおきます。
すると、

$$\int (2x)^4 dx = \int t^4 \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{1}{2} t^4 \, dt = \frac{1}{10} t^5 = \frac{1}{10}(2x)^5$$

のように計算できます。

⑤部分積分
それでは最後の山場、部分積分に行きましょう。
と言ってもこれは簡単で、さきほどの

$$\{f(x)g(x)\}' == f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

の逆を考えればいいのです。
F(x)を f(x)の原始関数として、上の式の f(x)に代入すると、

$$\{F(x)g(x)\}' = f(x)g(x) + F(x)g'(x) \Leftrightarrow f(x)g(x) = \{F(x)g(x)\}' - F(x)g'(x)$$

両辺 x について積分すると、

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\, dx$$

となります。これは覚えなくてもその場で導けるでしょう。僕も結局暗記せずじまいです。

使い方にはちょっとコツがいります。$f(x)g(x)$の形が見えるときはいいのですが、たまに、積分しづらい関数に対し、$f(x) = 1$のように考えて、うまくやってやる、みたいなときもあります。

取り敢えず必要な計算技法はこれくらいでしょうか。この資料をガイドに参考書等で確認した後、微分方程式の学習にとりかかってください。時間は少ないのですが、是非計算練習もやってください。

それでは、健闘を祈ります。